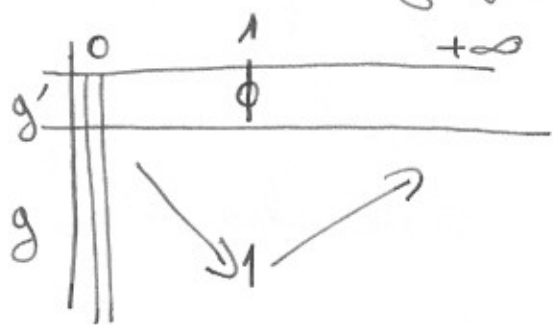


Ex 2 1) $g(x) = x - \ln x$ et $D_g =]0; +\infty[$

a) La fct° g est une somme de fct° dérivables sur $]0; +\infty[$ donc
 (0,5) elle est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \quad (0,5)$$

Sur $]0; +\infty[$ signe $g'(x) = \text{signe}(x-1)$ donc $g'(x) \geq 0$



$$\Leftrightarrow x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

(0,5) (b) D'après le tableau de variation on en déduit que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq 1$

2) a) $\forall x \in]0; +\infty[$ on a $x - \ln x \geq 1$ (1.b) donc $x - \ln x \neq 0$

(1) et f est le quotient de 2 fct° définies sur $]0; +\infty[$ tel que le dénominateur $\neq 0$, donc f définie sur $]0; +\infty[$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(1 - \frac{\ln x}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\ln x}{x})}$$

(1) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{\ln x}{x}) = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) La fonction f est le quotient de 2 fct° continues sur $]0; +\infty[$ et le dénominateur est $\neq 0$ sur cet intervalle donc

f continue sur $]0; +\infty[$

(0,5)

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{\ln x}{x - \ln x} = \lim_{0^+} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x}\right) - 1}$$

comme $\lim_{0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$ alors $\lim_{0^+} f(x) = -1$ donc $\lim_{0^+} f(x) = f(0)$

donc f est continue sur $[0; +\infty[$

d) $f(x)$ est le quotient de 2 fct^{os} dérivables sur $]0; +\infty[$ et le dénominateur est $\neq 0$ sur cet intervalle donc f dérivable sur $]0; +\infty[$

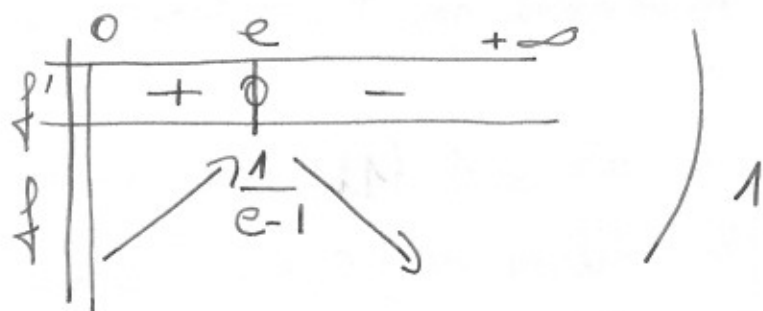
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \quad (1)$$

$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$
 $v(x) = x - \ln x \quad v'(x) = \frac{x-1}{x}$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e$$

$f(e) = \frac{1}{e-1}$



$$3) a) T: y = f'(1)(x-1) + f(1) = x-1 \quad (1)$$

b) Etudier les posit^{os} relatives de \mathcal{C}/T revient à étudier le signe de la différence.

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x - \ln x} - (x-1) = \frac{\ln x + (1-x)(x - \ln x)}{x - \ln x}$$

$$= \frac{x}{x - \ln x} - x \quad / \quad 0,5$$

$\forall x > 0$ et $x \neq 1$ on a $x - \ln x > 1$ donc $\frac{x}{x - \ln x} < x$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x - \ln x} - x < 0$$

donc \mathcal{C} est en dessous de T

4) $B(0; -1)$ et $\pi(x; f(x))$

a) $\overrightarrow{BT} \begin{pmatrix} x \\ f(x)+1 \end{pmatrix}$ donc le coef directeur = $\frac{f(x)+1}{x}$

$$= \frac{x}{(x - \ln x)x} = \frac{1}{x - \ln x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \ln x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln x) = +\infty$

b) Lorsque $x \rightarrow 0$ le coef directeur de la droite (BT) tend vers 0
donc on en déduit que la courbe \mathcal{C} admet en 0 une tangente horizontale.

5) 0,5 pt tracé de T

(- 0,5 non respect des échelles)

(- 0,25 oublié des tangentes)

(- 0,25 si pas assez de pts (< 5 pts))

(- 0,25 manque de précision)

ex 1 (5,5)

a) Soit $u(x) = \frac{e^x}{x}$ de

$$u'(x) = -\frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} \quad 0,5$$

$$\text{on a } u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x} - \left(-\frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} \right) = \frac{e^x}{x^2}$$

Donc u est sol de (E) 1

b) On suppose v sol de (E)

$$\text{donc } v - v' = \frac{e^x}{x^2} \text{ et on sait } u - u' = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\text{donc } (v - u) - (v' - u') = 0$$

Donc $(v - u)$ sol $y - y' = 0$ 1

On suppose $(v - u)$ sol de $y - y' = 0$

$$\text{donc } (v - u) - (v' - u') = 0$$

$$v - v' = u - u' \quad \text{comme } u - u' = \frac{e^x}{x^2}$$

donc $v - v' = \frac{e^x}{x^2}$ donc v sol de (E) 1

Conclusion v sol de (E) $\Leftrightarrow v - u$ sol de $y - y' = 0$

c) $y - y' = 0$ L'ensemble des sol. de cette equation differentielle sont les fct^s $f_k(x) = k e^x$ avec $k \in \mathbb{R}$ 1

v sol de (E) $\Leftrightarrow v - u$ sol $y - y' = 0$ 1

$$v(x) - u(x) = y = k e^x$$

$$v(x) = k e^x + u(x)$$

$$= k e^x + \frac{e^x}{x}$$