Devoir commun TS

Ex 2 1) $g(x) = x - \ln x$ et $D_g =]0;+\infty[$

a) La fct° g est une somme de fct° dérivables sur $]0;+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ 0,5

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$ 0,5

Sur $]0;+\infty[$ signe $g'(x)$ = signe $(x-1)$ donc $g'(x) \geq 0$
$\iff x - 1 \geq 0$
$\iff x \geq 1$

x	0		1		$+\infty$
g'	||		0		
g	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

1

0,5 b) D'après le tableau de variat° on en déduit que $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) \geq 1$

2) a) $\forall x \in]0;+\infty[$ on a $x - \ln x \geq 1$ (1.b) donc $x - \ln x \neq 0$ et f est le quotient de 2 fctions définies sur $]0;+\infty[$ tel que le dénominateur $\neq 0$, donc f définie sur $]0;+\infty[$ 1

b) $$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} \frac{1}{\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}$$

1 Comme $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$ alors $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$

c) La fonction f est le quotient de 2 fct°s continues sur $]0;+\infty[$ et le dénominateur est $\neq 0$ sur cet intervalle donc f continue sur $]0;+\infty[$

0,5

(1) $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln x}{x - \ln x} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{\ln x}\right) - 1}$; $\dfrac{x}{\ln x} \to 0$

comme $\lim\limits_{0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0$ alors $\lim\limits_{0^+} f(x) = -1$ donc $\lim\limits_{0^+} f(x) = f(0)$

donc f est continue sur $[0;+\infty[$

d) $f(x)$ est le quotient de 2 fct^{os} dérivables sur $]0;+\infty[$ et

(0,5) le dénominateur est $\neq 0$ sur cet intervalle donc f dérivable sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \quad (1)$$

$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v(x) = x - \ln x \quad v'(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$\cdot\ f'(x) \geq 0 \iff \ln x \leq 1$

$\iff x \leq e$

$f(e) = \dfrac{1}{e-1}$

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	

1

3) a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= x - 1$ 1

b) Etudier les posit° relatives de $\mathcal{C}/T$ revient à étudier le signe de la différence.

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x - \ln x} - (x-1) = \frac{\ln x + (1-x)(x - \ln x)}{x - \ln x}$$

$$= \frac{x}{x - \ln x} - x$$

0,5

$\forall x > 0$ et $x \neq 1$ on a $x - \ln x > 1$ donc $\dfrac{x}{x-\ln x} < x$

$$\iff \frac{x}{x-\ln x} - x < 0$$

donc $\mathcal{C}$ est en dessous de T

0,5

4) $B(0;-1)$ et $M(x; f(x))$

a) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x \\ f(x)+1 \end{pmatrix}$ donc le coef directeur $= \dfrac{f(x)+1}{x}$

$$= \frac{x}{(x-\ln x)x} = \frac{1}{x-\ln x}$$

0,5

$\lim\limits_{0} \dfrac{1}{x-\ln x} = 0$ car $\lim\limits_{0} (x - \ln x) = +\infty$ 0,5

b) Lorsque $x \to 0$ le coef directeur de la droite (BM) tend vers 0 donc on en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet en 0 une tangente horizontale.

0,5

5) 0,5 pt tracé de T

(- 0,5 non respect des echelles)

(- 0,25 oubli des tangentes)

(- 0,25 si pas assez de pts (< 5 pts))

(- 0,25 manque de precision)

ex 1 (5,5)

a) Soit $u(x) = \frac{e^x}{x}$ de

$u'(x) = -\frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x}$ 0,5

on a $u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x} - \left(-\frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x}\right) = \frac{e^x}{x^2}$

Donc u est sol de (E) 1

b) On suppose v sol de (E)

donc $v - v' = \frac{e^x}{x^2}$ et on sait $u - u' = \frac{e^x}{x^2}$

donc $(v-u) - (v'-u') = 0$

Donc $(v-u)$ sol $y - y' = 0$ 1

On suppose $(v-u)$ sol de $y - y' = 0$

donc $(v-u) - (v'-u') = 0$

$v - v' = u - u'$ comme $u - u' = \frac{e^x}{x^2}$

alors $v - v' = \frac{e^x}{x^2}$ donc v sol de (E) 1

Conclusion : v sol de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ sol de $y - y' = 0$

c) $y - y' = 0$ L'ensemble des sol. de cette equation differentielle sont les fcts $f_k(x) = k e^x$ avec $k \in \mathbb{R}$ 1

ss $k \in \mathbb{R}$ -0,25

v sol de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ sol $y - y' = 0$

$v(x) - u(x) = y = k e^x$

$v(x) = k e^x + u(x)$

$= k e^x + \frac{e^x}{x}$ 1