TS

Correction complexes appli. Polynésie 98

$a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ $\qquad z_0 = 6+6i$

$= \frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ $\qquad = 6\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n(z_n)$ tel que $z_n = a^n z_0$

Partie A

1) $z_1 = a z_0 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)\right)(6+6i)$

$= \frac{6}{4}\left(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)\right)$

$= \frac{3}{2}\left(2+2\sqrt{3}i\right) = 3+3\sqrt{3}i$

$a^2 = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{16} + \frac{2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{16} - \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}$

$z_1 = 3+3\sqrt{3}i = 3(1+\sqrt{3}i) = 6\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$

$a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) $z_3 = a^3 z_0 = a^2 z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.\,6e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_7 = a^7 z_0 = a^6 a z_0 = a^6 z_1 = (a^2)^3 z_1 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 6e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Partie B

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = r_n$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

1) Verifions si P_0 est vraie.

$|z_0| = 6\sqrt{2}$ et $r_0 = 12\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ donc P_0 vraie

2) On suppose P_n vraie et ss cette hypothèse on montre que P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie

$z_{n+1} = a^{n+1} z_0$ donc $|z_{n+1}| = |a^{n+1} z_0|$

$= |a^n a z_0| = |a^n z_1|$

comme $a^n = \frac{z_n}{z_0}$ donc $|a^n| = \frac{|z_n|}{|z_0|}$ d'où $= \frac{|z_n||z_1|}{|z_0|}$

$= 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}\sqrt{2}}$

$= 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

$= 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2}$

donc P_{n+1} vraie

2) (r_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme $r_0 = 6\sqrt{2}$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $|q| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$

4) $OA_p = |z_p - 0| = |z_p| = r_p$ donc on cherche p tel que $r_p \leq 10^{-3}$

$12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1} \leq 10^{-3}$ $\Longleftrightarrow$ $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \leq \ln \frac{10^{-3}}{6\sqrt{2}}$ " $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ "

$\Leftrightarrow 6\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \leq 10^{-3}$ $\quad p \geq 26,1$

$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \leq \frac{10^{-3}}{6\sqrt{2}}$ $\quad$ d'où $p = 27$