M = 9,2 dm

1 ère S B	Devoir Surveillé n ° 8 Produit scalaire	**Barème :** 1) 3 *pts* 2) 3 *pts* 3) 7 *pts* 4) 4 *pts* 5) 3 *pts*	- Durée 1 h 00 - Calculatrices autorisées

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante. Soyez propre et clair . Bonne chance ...*

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ,(d) et (d') sont deux droites d'équations respectives
(d): $y = \frac{1}{2}x + 5$ et (d'): $y = 3x - 5$.

La droite (d) coupe l'axe des ordonnées en B, (d)' coupe l'axe des ordonnées en C et (d) et (d') se coupent en A.

a) Faire une figure.

b) Donnez une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 2 :

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On considère les vecteurs $\vec{u}$ (cos t ; sin t) et $\vec{v}$ (2 sin t ; 2 cos t) avec $t \in [0 ; 2\pi[$

a) déterminer les valeurs de t pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

b) Prouver que les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendantes de t.

Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé .
Pour tout réel k, on note C_k l'ensemble d'équation : $x^2 + y^2 - 2kx + 2x + 2ky + 6y - 10 = 0$

1) Déterminer les ensembles C_0 et C_1 (donner leur nature et leurs caractéristiques)

2) Démontrer que **pour tout réel k**, C_k est un cercle.
Déterminer les coordonnées (x_k ; y_k) du centre I_k de C_k et calculer son rayon r_k

3) Quel est l'ensemble des points I_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$?

Exercice 4 : trigonométrie *(dans cet exercice toutes les questions sont indépendantes)*

a) Montrer que : $\cos(2x)\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{4}\sin(4x)$

En déduire une simplification de l'écriture suivante : $\cos(4x)\cos(2x)\cos(x)\sin(x)$

b) Montrer que : $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos(2x)$

c) Vérifiez que $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$

Exercice 5 :

ABC est un triangle tel que $\sin\hat{B} = 2\sin\hat{C} \times \cos\hat{A}$

a) Démontrer que $AC = 2\,AB \times \cos\hat{A}$

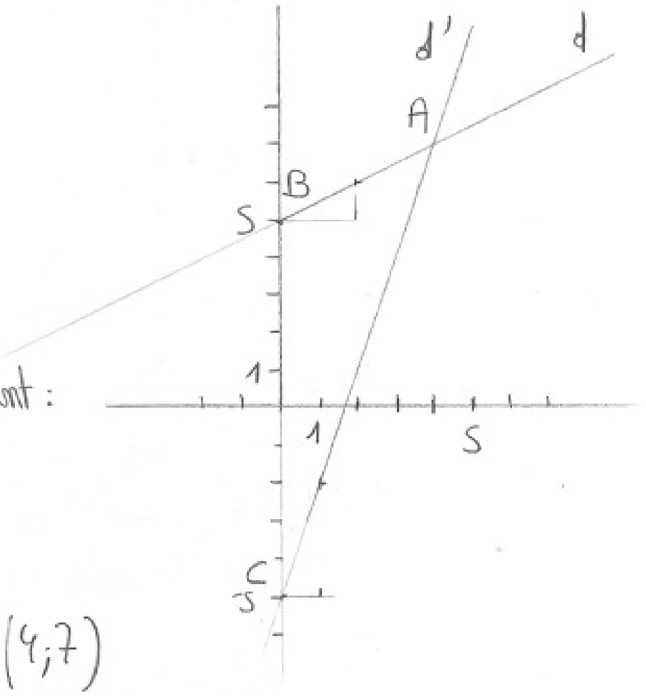
b) En déduire que le triangle ABC est isocèle en B.

Quelques rappels de trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Exercice 1 /3.

1)



2) $\vec{AB}.\vec{AC} = \|\vec{AB}\| \, \|\vec{AC}\| \cos(\widehat{BAC})$

2 $B(0;5)$; $C(0;-5)$

$A \in (d) \cap (d')$ donc il verifie le système suivant :

$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 5 = y \\ 3x - 5 = y \end{cases}$ $\begin{cases} x + 10 = 6x - 10 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = 20 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$ on trouve $A(4;7)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\|\vec{AB}\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{16+144} = 4\sqrt{10}$

$\vec{AB}.\vec{AC} = 16 + 24 = 40$

$= 2\sqrt{5}.4\sqrt{10}.\cos(\widehat{BAC})$ on en deduit $\cos \widehat{BAC} = \frac{40}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2 /3

$\vec{u}(\cos t ; \sin t)$ $\vec{v}(2\sin t, 2\cos t)$

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\cos t . 2\sin t + \sin t . 2\cos t = 0$

$2\cos t \sin t + 2\sin t \cos t = 0$

1,5 $2\sin 2t = 0$ donc $\begin{cases} 2t = 0 + 2k\pi \\ 2t = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k\pi \\ t = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$t \in \left\{0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi ; \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

1,5 $\|\vec{v}\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$

Exercice 3 /7

1 _ $C_0 : x^2+y^2+2x+6y-10=0$ 0,5

1,5 $(x+1)^2+(y+3)^2 = 10+1+9 = 20$

$(x+1)^2+(y+3)^2 = 20$

1,5 donc C_0 est le cercle de centre $\Omega(-1;-3)$ et de rayon $\sqrt{20}$

$C_1 : x^2+y^2-2x+2x+2y+6y = 10$

$x^2+y^2+8y = 10$ 0,5

$x^2+(y+4)^2 = 26$

1,5 donc C_1 est le cercle de centre $\Omega(0;-4)$ et de rayon $\sqrt{26}$.

2 _ $C_k : x^2+2(1-k)x+y^2+2(k+3)y = 10$

$(x+(1-k))^2+(y+(k+3))^2 = 10+(1-k)^2+(k+3)^2$

$= 2k^2+4k+20$ 1

2,5 $\Delta = 16-4.2.20 = -144$.

d'après l'expression [1] $2k^2+4k+20$ on en deduit [1] >0 0,5

donc C_k est le cercle de centre $\Omega(k-1;-3-k)$ et de rayon $=\sqrt{2k^2+4k+20}$

0,5 0,5

3 _ On a $\Omega(k-1;-3-k)$ donc $\begin{cases} x = k-1 \\ y = -3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x+1 \\ y = -3-k \end{cases}$

$y = -3-(x+1) = -4-x$ donc lorsque k decrit $\mathbb{R}$

1,5 alors I_k decrit la droite d'equation $y = -x-4$.

Exercice 4

a) $\cos 2x \cos x \sin x = \frac{\cos 2x . 2\cos x \sin x}{2} = \frac{\cos 2x \sin 2x}{2} = \frac{2\cos 2x \sin 2x}{4}$

1,5 $= \frac{\sin 4x}{4}$

$\frac{\cos(4x).\cos(2x).2\cos x \sin x}{2} = \frac{\cos 4x . \cos 2x . \sin 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin(8x)\right)$ 0,75

$= \frac{\sin 8x}{8}$ 0,5 pas developper

1 b) $\frac{1}{4}\left(\left(1+\cos 2x\right)^2-\left(1-\cos 2x\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\cancel{1}+2\cos 2x+\cancel{\cos^2 2x}\right)-\left(\cancel{1}-2\cos 2x+\cancel{\cos^2 2x}\right)\right)$

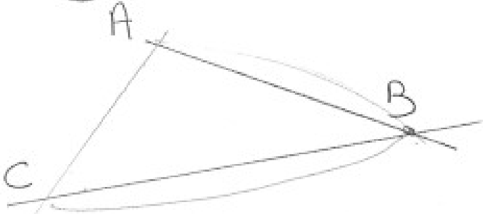
$= \frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{4} \times \cos 2x = \cos 2x$

c) $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$

1,5 $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2.2} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

exercice 5 : /3



$\sin\widehat{B} = 2\sin\widehat{C}.\cos\widehat{A}$

1 a) $\frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}}$ $\quad AC = AB.\frac{2\cancel{\sin\widehat{C}}\cos\widehat{A}}{\cancel{\sin\widehat{C}}} = 2AB\cos\widehat{A}$

b) $AC = AB.2\cos\widehat{A}$ $\quad AB = \frac{AC}{2\cos\widehat{A}}$

2

D'apres la formule d'Al-Kashi : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A}$

$= 4AB^2(\cos\widehat{A})^2 + AB^2 - 4AB.AB.\cos^2\widehat{A}$

$BC^2 = AB^2$